QUIMICA FISICA II. CURSO 2003-2004. SERIE 01.
Postulados y Principios generales de la Mecánica Cuántica

1. ¿Cuáles de los siguientes operadores son lineales? (a) $3x^2d^2/dx^2$, (b) $()^2$, (c) exp, (d) $\int dx$.

2. ¿Cuáles de los siguientes operadores son hermíticos? (a) d/dx, (b) id/dx, (c) $\vec{\nabla}$, (d) $i\vec{\nabla}$, (e) ∇^2.

3. Sea $z = 2 + 3i$. Expresa el número en forma polar, $|z|e^{i\phi}$. Determina z^2, $|z|^2$, y e^z.

4. (a) Encuentra el cuadrado del operador $\hat{A} = d/dx + \hat{x}$. (b) Si $\hat{D} = d/dx$ demuestra que $(\hat{D} + \hat{x})(\hat{D} - \hat{x}) = \hat{D}^2 - \hat{x}^2 - 1$. (c) Demuestra que $(\hat{A} + \hat{B})^2 = (\hat{B} + \hat{A})^2$ para cualesquiera dos operadores (lineales o no lineales). (d) ¿Bajo qué condiciones $(\hat{A} + \hat{B})^2$ es igual a $\hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$?

5. Determina cuáles de las siguientes funciones son propias del operador d^2/dx^2 y obtén el valor propio si ha lugar: Ae^{ax}, x^2, $\sin(x)$, $\sin(ax) + \cos(ax)$.

6. Demuestra que la función $\cos(ax)\cos(by)\cos(cz)$ es función propia del operador ∇^2. ¿Cuál es su valor propio?

7. Determina los valores propios de un operador lineal y hermítico tal que $\hat{\sigma}^2 = \hat{1}$. ¿Cuáles serían los valores propios si el operador fuese tal que $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}$?

8. El operador *transformada de Laplace* $\hat{\mathcal{L}}$ se define por $\hat{\mathcal{L}}f(x) = \int_0^\infty e^{-px}f(x)dx$, donde p es una constante positiva. (a) ¿Es $\hat{\mathcal{L}}$ lineal? (b) Evalúa $\hat{\mathcal{L}}(1)$. (c) Evalúa $\hat{\mathcal{L}}e^{ax}$ suponiendo que $p > a$.

9. Definimos el operador de *traslación* $\hat{T}_h$ como: $\hat{T}_h f(x) = f(x + h)$. (a) ¿Es $\hat{T}_h$ lineal? (b) Evalúa $(\hat{T}_1^2 - 3\hat{T}_1 + 2)x^2$.

10. Definimos el operador $e^{\hat{A}}$ por la ecuación
$$e^{\hat{A}} = \hat{1} + \hat{A} + \frac{\hat{A}^2}{2!} + \frac{\hat{A}^3}{3!} + ...$$
Demostrar que $e^{\hat{D}} = \hat{T}_1$, donde $\hat{D} = d/dx$ y $\hat{T}_1$ es el operador traslación definido en el problema anterior.

11. Comprobar las siguientes propiedades de los conmutadores:
    (a) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$,
    (b) $[\hat{A}, \hat{A}^n] = 0$,
    (c) $[k\hat{A}, \hat{B}] = k[\hat{A}, \hat{B}]$,
    (d) $[\hat{A}, k\hat{B}] = k[\hat{A}, \hat{B}]$,
    (e) $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$,
    (f) $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$,
    (g) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$,
    (h) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$.

12. Evaluar los conmutadores siguientes: (a) $[\hat{x}, \hat{p}_x]$; (b) $[\hat{x}, \hat{p}_x^2]$; (c) $[\hat{x}, \hat{p}_y]$; (d) $[\hat{x}, V(x, y, z)]$; (e) $[\hat{x}, \hat{T}]$; (f) $[\hat{x}, \hat{H}]$; (g) $[\hat{p}_x, \hat{p}_y]$; (h) $[\hat{p}_x, V(x, y, z)]$; (i) $[\hat{p}_x, \hat{T}]$; (j) $[\hat{p}_x, \hat{H}]$.

13. Sean $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dos operadores hermíticos. (a) Demuestra que el operador producto $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ es hermítico si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ conmutan. (b) Demuestra que $1/2(\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha})$ es siempre hermítico.

14. Sea $\hat{\alpha}$ un operador hermítico. Demuestra que $\langle\hat{\alpha}^2\rangle = \int|\hat{\alpha}\psi|^2dq$ y, por lo tanto, $\langle\hat{\alpha}^2\rangle \geq 0$.