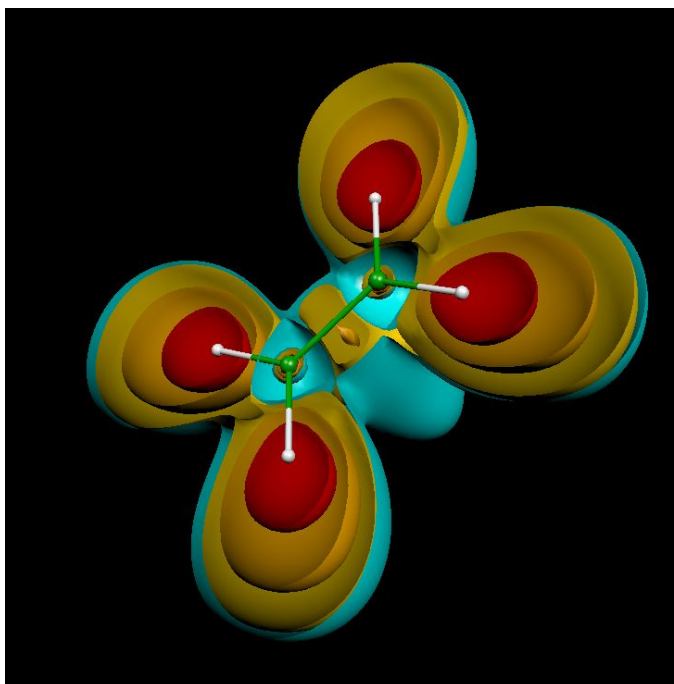


# Química Física II

Víctor Luaña



Departamento de Química Física y Analítica, Universidad de Oviedo

**Area de Conocimiento: Química Física.**  
**Departamento: Química Física y Analítica.**  
**Curso: 2005-2006**

**Curso:** Tercero. **Ciclo:** Segundo. **Cuatrimestres:** Anual.

**Especialidad:** Común. **Caracter:** Troncal.

**Periodicidad:** 4 Horas/Semana. **Créditos:** 12.

**Tipo de Evaluación:** Exámenes parciales o examen final.

**Exámenes:** 2006-02-06/16–20 (1P y Feb), 2006-06-19/10–14 (2P), 2006-06-29/10–14 (Final), 2006-09-06/9–12:30.

**Aprobado por parciales:**  $n_{1P}, n_{2P} \geq 4$  y  $(n_{1P} + n_{2P})/2 \geq 5$ .

**Aprobado en el final:** se realiza el examen de una o ambas partes.

**Aprobado en septiembre:** examen único de la asignatura completa.

**Profesores:** Víctor Luaña (grupos A y B)

**E-mail:** [victor@carbono.quimica.uniovi.es](mailto:victor@carbono.quimica.uniovi.es)

**Webpage:** <http://web.uniovi.es/qcg/asignaturas.html>

## **I. Mecánica cuántica y estructura electrónica.**

**L01:** Los postulados de la Mecánica cuántica.

**L02:** Problemas de una partícula con solución analítica.

**L03:** Problemas de dos partículas con solución analítica.

**L04:** Métodos aproximados. Teoría atómica: el átomo de dos electrones.

**L05:** Teoría atómica: átomos multielectrónicos.

**L06:** Teoría de la estructura electrónica molecular. I. Moléculas diatómicas y lineales.

**Lxx:** Simetría molecular y representaciones matriciales de los grupos puntuales.

**L07:** Teoría de la estructura electrónica molecular. II. Moléculas poliatómicas.

## **II. Termodinámica estadística**

**L08:** Principios de la mecánica estadística.

**L09:** Sistemas de partículas independientes. Estadística del gas ideal.

## **III. Cinética formal y mecanismos de las reacciones químicas.**

**L10:** Cinética formal de las reacciones químicas.

**L11:** Reacciones complejas y mecanismos de las reacciones químicas.

## Web y correo electrónico:

- Estas notas están a vuestra disposición en la página web de la asignatura, junto con problemas resueltos, enunciados y solución de algunos exámenes anteriores, etc.
- Os ruego vuestra ayuda para depurar errores de estas notas.
- Estad atentos a las novedades y noticias que puedan aparecer en la web.
- Usaremos vuestra cuenta de correo en <http://directo.uniovi.es> para enviaros noticias urgentes de la asignatura.

## Textos de consulta:

- I. N. Levine, *Físicoquímica*, (McGraw-Hill, Madrid, 1996), vol. 2, isbn 84-481-0617-2.
- Juan Bertrán Rusca y Javier Nuñez Delgado, *Química física*, (Ariel, Barcelona, 2001), vol. 1, isbn 84-344-8050-6.
- I. N. Levine, *Química Cuántica*, (Prentice Hall, Madrid, 2001), isbn 84-205-3096-4.
- D. A. McQuarrie, *Statistical Mechanics*, (Harper & Row, New York, 1976).
- T. L. Hill, *Statistical Mechanics*, (Dover, New York)

# Calendario Académico 2005-2006

- Período no lectivo y fiestas nacionales
- Fiestas locales y Universitarias
- Fiestas patronales y de Centro
- Exámenes

Octubre						
L	M	Mi	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Noviembre						
L	M	Mi	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Diciembre						
L	M	Mi	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Enero						
L	M	Mi	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Febrero						
L	M	Mi	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

Marzo						
L	M	Mi	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Abril						
L	M	Mi	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Mayo						
L	M	Mi	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Junio						
L	M	Mi	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Julio						
L	M	Mi	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Agosto						
L	M	Mi	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Septiembre						
L	M	Mi	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Valores recomendados (CODATA2002) de las constantes físicas fundamentales (Ver <http://physics.nist.gov/constants/>).

Constante		Valor	
Velocidad de la luz en el vacío	$c$	299792458 m/s	exacta
Constante de Planck	$h$	$6.6260693(11) \times 10^{-34}$ J s	
	$\hbar$	$1.05457168(18) \times 10^{-34}$ J s	$\hbar = h/2\pi$
Carga elemental	$e$	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ C	
Radio de Bohr	$a_0$	$0.5291772108(18) \times 10^{-10}$ m	$a_0 = \hbar^2/m_e e^2$
	$a_0$	$0.5291772108(18)$ Å	
Energía de Hartree	$E_h$	$4.35974417(75) \times 10^{-18}$ J	$E_h = e^2/a_0$
Masa del electrón	$m_e$	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ kg	
Masa del protón	$m_p$	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ kg	
Constante de Avogadro	$N_A$	$6.0221415(10) \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	$L \equiv N_A$
Unidad de masa atómica	$m_u$	$1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg	$m_u = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$
Constante de Faraday	$F$	$96485.3383(83)$ C mol <sup>-1</sup>	$F = eN_A$
Constante molar de los gases	$R$	$8.314472(15)$ J/mol K	
Constante de Boltzmann	$k_B$	$1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K	$R = k_B N_A$

Es una costumbre habitual utilizar de modo intercambiable unidades de energía ( $\epsilon$ ), masa ( $m$ ), frecuencia ( $\nu$ ), número de ondas ( $\bar{\nu}$ ), longitud de onda ( $\lambda$ ), temperatura ( $T$ ) o energía molar ( $E$ ). Todas estas magnitudes se convierten entre sí mediante constantes fundamentales:

$$\epsilon = mc^2 = h\nu = hc\bar{\nu} = \frac{hc}{\lambda} = k_B T, \quad E = N_A \epsilon. \quad (1)$$

Todas son directamente proporcionales entre sí, excepto la longitud de onda, que es inversamente proporcional a las restantes. La tabla siguiente sirve para facilitar la conversión de unas en otras,

Factores de proporcionalidad entre equivalentes de la energía.

	J	Hz	$\text{cm}^{-1}$	K	hartree	kJ/mol
1 J	1	$1.509190 \times 10^{33}$	$5.034117 \times 10^{22}$	$7.242963 \times 10^{22}$	$2.293713 \times 10^{17}$	$6.022142 \times 10^{20}$
1 Hz	$6.626069 \times 10^{-34}$	1	$3.335641 \times 10^{-11}$	$4.799237 \times 10^{-11}$	$1.519830 \times 10^{-16}$	$3.990313 \times 10^{-13}$
1 $\text{cm}^{-1}$	$1.986446 \times 10^{-23}$	$2.997925 \times 10^{10}$	1	1.438775	$4.556335 \times 10^{-6}$	0.01196266
1 K	$1.380561 \times 10^{-23}$	$2.083664 \times 10^{10}$	0.6950356	1	$3.166815 \times 10^{-6}$	$8.314472 \times 10^{-3}$
1 hartree	$4.359744 \times 10^{-18}$	$6.579684 \times 10^{15}$	219474.63	315774.65	1	2625.500
1 kJ/mol	$1.660053 \times 10^{-21}$	$2.506069 \times 10^{12}$	83.59347	120.2722	$3.808798 \times 10^{-4}$	1

También es útil recordar que 1 cal = 4.184 J (exacto).

### Prefijos utilizados en el sistema internacional de unidades

Yocta	Peta	Tera	Giga	Mega	kilo	
Y	P	T	G	M	k	
$10^{+18}$	$10^{+15}$	$10^{+12}$	$10^{+9}$	$10^{+6}$	$10^{+3}$	
Europa:		billón	millardo	millón		
USA:		trillion	billion	million		
mili	micro	nano	pico	femto	atto	zepto
m	$\mu$	n	p	f	a	z
$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$	$10^{-18}$	$10^{-21}$

### Alfabeto griego

alfa	$\alpha$	A	eta	$\eta$	H	nu	$\nu$	N	tau	$\tau$	T
beta	$\beta$	B	theta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	xi	$\xi$	$\Xi$	ípsilon	$\upsilon$	$\Upsilon$
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	iota	$\iota$	I	ómicron	o	O	phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$
delta	$\delta$	$\Delta$	kappa	$\kappa, \varkappa$	K	pi	$\pi, \varpi$	$\Pi$	ji,chi	$\chi$	X
epsilon	$\epsilon, \varepsilon$	E	lambda	$\lambda$	$\Lambda$	rho	$\rho$	P	psi	$\psi$	$\Psi$
zeta	$\zeta$	Z	mu	$\mu$	M	sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	omega	$\omega$	$\Omega$



## Ejercicios y herramientas informáticas

- Esta asignatura **NO** se puede entender memorizando un texto.
- Es **esencial** para dominar la asignatura que os esforcéis por vuestra cuenta en realizar los ejercicios que se proponen *antes de mirar las soluciones*, si están disponibles.
- Casi todos los ejercicios se resuelven fácilmente “a mano”, pero una herramienta informática puede facilitar mucho algunas tareas y permite generalizar algunos problemas.
- Os recomiendo dos herramientas muy útiles, de distribución libre y disponibles para cualquier sistema operativo:

**gnuplot** (<http://www.gnuplot.info/>), un programa que permite hacer excelentes gráficas 2D y 3D con gran facilidad. También es muy útil para realizar ajustes de mínimos cuadrados de funciones generales. Ej:

```
plot [0:2*pi] sin(x), cos(x)
f(x) = a + b*x + c*x**2; fit f(x) 'datos.dat' via a,b,c
```

**octave** (<http://www.octave.org/>), un programa de cálculo que trabaja muy eficientemente con funciones, vectores y matrices. Por ej., para resolver una ecuación lineal  $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$  y encontrar los valores y vectores propios de  $\underline{\underline{A}}$ :

```
A = [2,1,1; 1,3,1; 1,1,4];    b = [1; 2; 3];    x = b \ A
[vector, valores] = eig(A)
```

**Cifras significativas y precisión en los cálculos:** Hay tres elementos de información importantes en una cantidad física: (1) su valor, (2) su precisión o error, y (3) su unidad.

Es muy importante el manejo correcto de las **unidades** y también de las **cifras significativas**.

Escrita correctamente, una cantidad física tiene tantas cifras significativas como dígitos en la mantisa cuando empleamos la **notación científica**:

$$\pm \underbrace{D.ddd \cdots d}_{\text{mantisa}} \times 10^{\text{exponente}}, \quad (2)$$

donde  $D \in 1-9$  y  $d \in 0-9$ . Ej.:  $-0.0000323$  y  $3.23 \times 10^{12}$  tienen 3 cifras significativas, mientras que  $2.000 \times 10^{-3}$  tiene 4.

**Reglas básicas** sobre las cifras significativas en el resultado de una operación:

- Multiplicación/división: El resultado tendrá tantas cifras significativas como el menos preciso de los factores.
- Potencias enteras y fraccionarias: se mantienen las cifras significativas.
- Suma/resta: tras alinear los puntos decimales, las cifras significativas las determina el sumando que primero las agote en un recorrido de izquierda a derecha.
- Para evitar que los errores se acumulen al operar conviene hacer las operaciones intermedias con una o dos cifras más de las significativas y ajustar redondeando el resultado final.

**Redondeo** de  $\pm \underbrace{S.ss \cdots su}_{\text{signif.}} \overbrace{nnn \cdots n}_{\text{nosig.}}$ :

- Si  $n.nn \dots < 5.00 \dots$  despreciamos las cifras no significativas.
- Si  $n.nn \dots > 5.00 \dots$  sumamos 1 a la última cifra significativa ( $u \rightarrow u + 1$ ).
- Si  $n.nn \dots = 5.00 \dots$  sumamos 1 a la última cifra significativa sólo cuando ésta es impar.

Ej.: Redondeando a tres cifras  $2.1232 \rightarrow 2.12$ ,  $2.1253 \rightarrow 2.13$ ,  $2.1250 \rightarrow 2.12$  y  $2.1350 \rightarrow 2.14$ .

**Propagación de errores:** Sea  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_1 \dots x_n$  son variables independientes. El error absoluto se propaga como:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \tag{3}$$

La propagación de errores **absolutos** ( $\Delta x$ ) o relativos ( $\Delta x/|x|$ ) en algunas expresiones comunes es:

$z = ax + by$	$z = \lambda x^a y^b$	$z = \lambda \ln x$	$z = \lambda e^{\alpha x}$
$\Delta z =  a \Delta x +  b \Delta y$	$\frac{\Delta z}{ z } =  a  \frac{\Delta x}{ x } +  b  \frac{\Delta y}{ y }$	$\Delta z =  \lambda  \frac{\Delta x}{ x }$	$\frac{\Delta z}{ z } =  \alpha  \Delta x$

Más detalles en el Apéndice A de <http://www.uniovi.es/qcg/EspMol/Problemas.pdf> y en cualquier manual de estadística y propagación de errores.

**Números complejos:** Sea  $i = j = \sqrt{-1}$  el número imaginario. Un número complejo,  $z$ , formado por una parte real  $\text{Re}(z) = a$  y una parte imaginaria  $\text{Im}(z) = b$  se describe mediante la *representación cartesiana*

$$z = a + bi. \quad (4)$$

Los números complejos se pueden representar como puntos o como vectores en el *diagrama de Argand*, en el que las partes real e imaginaria constituyen la abscisa y ordenada, respectivamente.

También es posible escribir  $z$  en *forma polar*

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad (5)$$

donde  $|z|$  es el **módulo** y  $\varphi$  la **fase o argumento** del número. Esta representación hace uso de la *relación de Euler*:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha. \quad (6)$$

El diagrama de Argand muestra claramente la relación entre las representaciones cartesiana y polar:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan(b/a), \quad a = |z| \cos \varphi, \quad b = |z| \sin \varphi. \quad (7)$$

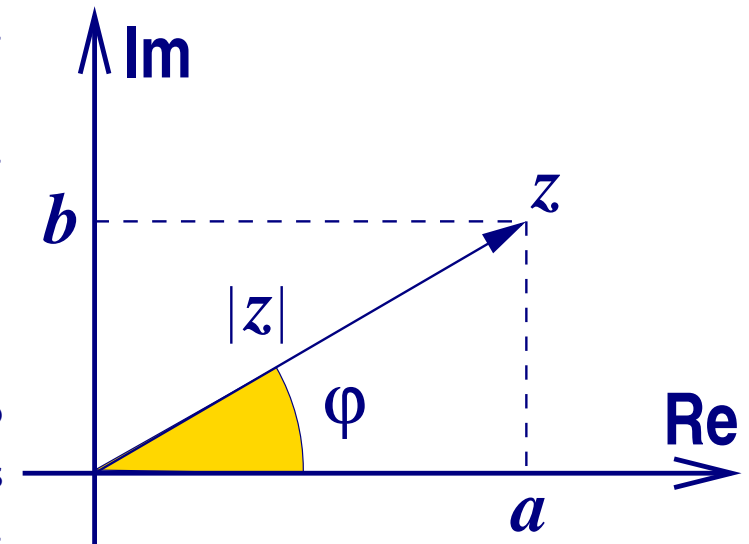


Diagrama de Argand.

La suma y producto de complejos están definidas como sigue:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i. \end{aligned} \quad (9)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $i^2 = -1$ . El producto es más sencillo si empleamos la representación polar:

$$z_1 z_2 = (|z_1| e^{i\varphi_1}) (|z_2| e^{i\varphi_2}) = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (10)$$

Suma y producto gozan de las mismas propiedades asociativa, conmutativa y distributiva que las operaciones equivalentes con los números reales. El conjunto  $\mathbb{C}$  de los complejos, lo mismo que su subconjunto formado por los números reales  $\mathbb{R}$ , forma por ello una estructura que recibe el nombre de cuerpo.

Una operación de gran importancia es la **conjugación**. El conjugado de un complejo se define por:

$$z^* = (a + b i)^* = a - b i, \quad z^* = (|z| e^{i\varphi})^* = |z| e^{-i\varphi}. \quad (11)$$

de modo que la conjugación cambia de signo la parte imaginaria y la fase, mientras mantiene inalteradas la parte real y el módulo del número. En cuanto al conjugado de sumas y productos

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*. \quad (12)$$

El producto de un número por su conjugado forma el **cuadrado complejo**,

$$z^* z = z z^* = a^2 + b^2 = |z|^2, \quad (13)$$

que es siempre un número real y no debe confundirse con el cuadrado ordinario,

$$z^2 = (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi, \quad (14)$$

que es un número complejo, en general. Ambos cuadrados coinciden si  $z$  es un número real.

Los números complejos tienen una extremada importancia en física en la descripción de cualquier tipo de onda. Por ejemplo, en el caso del movimiento armónico simple la elongación varía con el tiempo como cualesquiera de las partes real o imaginaria de

$$x(t) = x_0 e^{i(\omega t + \phi)}, \quad (15)$$

donde  $x_0$  es la amplitud,  $\omega = 2\pi\nu$  la frecuencia angular y  $\phi$  la fase. Las propiedades de los complejos equivalen a los característicos fenómenos de interferencia típicos de las ondas.

Similarmente, la propagación de la radiación electromagnética responde a una variación periódica, tanto en el tiempo como en el espacio, de un campo eléctrico y un campo magnético según

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (16)$$

donde  $\vec{r}$  representa un punto del espacio,  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_k$  es el vector de ondas y  $\lambda$  la longitud de onda.

## Ejercicios

- La energía potencial,  $E(R)$ , de la molécula de  $^{35}\text{Cl}_2$  se puede expresar, en un pequeño rango en torno a la distancia de equilibrio, como una parábola  $E(R) = A + BR + CR^2$ , donde  $R$  es la distancia internuclear,  $A = 6.89816 \times 10^{-18}$  J,  $B = -6.535222 \times 10^{-8}$  J m $^{-1}$  y  $C = 164.3667$  J m $^{-2}$ .
  - Determina la distancia de equilibrio,  $R_e$ , que corresponde al mínimo de la parábola. Expresa su valor en Å. Ten cuidado con las cifras significativas en éste y en los siguientes apartados.
  - Dibuja esta parábola y su primera derivada  $E'(R) = dE(R)/dR$ .
  - Determina la curvatura de la función  $E(R)$  en el mínimo,  $k_e = (d^2E/dR^2)_{R=R_e}$ , y la energía en el mínimo  $E(R = R_e)$ .
  - La masa reducida de una molécula diatómica  $AB$  viene dada por  $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ , donde  $m_A$  y  $m_B$  son las masas de sus correspondientes núcleos. Calcula  $\mu$  para la molécula  $^{35}\text{Cl}_2$  y exprésala en unidades atómicas de masa y en kg. La masa del isótopo  $^{35}\text{Cl}$  es 34.96885271 g/mol.
  - Calcula la frecuencia de vibración fundamental,  $\nu_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k_e/\mu}$ , y exprésala en Hz.
  - Convierte  $\nu_e$  al número de ondas correspondiente, expresado en  $\text{cm}^{-1}$ .
- Una forma más apropiada de representar aproximadamente el potencial nuclear de una molécula

diatómica es el potencial de Morse:

$$E(R) = D \left[ 1 - e^{\beta(R-R_e)/R_e} \right]^2.$$

- (a) Dibuja la forma de esta función. (b) Examina su comportamiento en el límite  $R \rightarrow \infty$ . (c) Determina la distancia de equilibrio,  $R_e$ , la constante de fuerza o curvatura en el mínimo,  $k_e$ , y la energía de disociación espectroscópica,  $D_e = E(R \rightarrow \infty) - E(R_e)$ .
3. Examina la función  $x(t) = (e^{kt} - 1)/(a + be^{kt})$ . (a) Dibuja la función para  $t > 0$  si  $a = 1$  y  $b = 0.01$  y muestra que su comportamiento es el de una sigmoide. (b) Dibuja también  $\dot{x}(t) = dx/dt$  y  $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$  en las mismas condiciones. (c) Encuentra, en función de  $a$  y  $b$ , la posición  $t_*$  a la que se encuentra el punto de inflexión de la curva, caracterizado porque  $\ddot{x}(t_*) = 0$ .
4. Ajusta, empleando el método de mínimos cuadrados, las siguientes funciones a los datos que figuran en la tabla adjunta. Las funciones son: (a) una línea recta  $y = a + bx$ ; (b) una función exponencial  $y = ae^{bx}$ ; (c) una función potencial  $y = ax^b$ ; (d) una función logarítmica  $y = a + b \ln x$ ; y (e) una función lineal inversa  $y = a + b/x$ .

$x$	474,0	435,9	402,3	376,9	329,1	290,0	250,2	206,0
$y$	1 336,0	1 439,0	1 560,6	1 678,9	1 987,8	2 336,9	2 741,6	3 237,4

5. Encuentra el potencial de Morse, así como los polinomios de grado 2, 3, 4 y 6 que mejor se ajustan, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los datos siguientes  $E(R)$ :



$R$	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	2.5
$E$	0.78255	0.40335	0.16446	0.03776	0.00000	0.03196	0.11784	0.24465	0.40177	2.18814

6. La elongación de un movimiento armónico simple viene dada por cualesquiera de las partes real o imaginaria de  $x(t) = x_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ , donde  $x_0 = |x|$  es la amplitud,  $\omega = 2\pi\nu$  la frecuencia angular y  $\phi$  el ángulo de fase.
- Dibuja frente al tiempo las partes real e imaginaria de  $x(t)$  y comprueba que ambas son equivalentes salvo un desfase de  $\pi/2$ .
  - Examina el comportamiento de una onda formada por la superposición de dos ondas simples,  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , de igual amplitud y frecuencia entre las que existe una diferencia de fase  $\delta = \phi_1 - \phi_2$ . Determina la amplitud de la onda resultante en función de  $\delta$ . Examina, en particular, los casos  $\delta = \{0, \pi/4, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ .
  - Considera el movimiento en una dimensión de una partícula clásica de masa  $m$  sometida a una fuerza recuperadora elástica  $f = -kx$ , donde  $k$  es la constante de fuerza o constante de muelle. Muestra que la partícula describe un movimiento armónico simple en el que  $\omega = \sqrt{k/m}$ .
  - Calcula las energías cinética y potencial de la partícula del apartado anterior, represéntalas tanto frente a  $t$  como frente a  $x$ , y demuestra que su suma es constante como exige el principio de conservación de la energía.